FISICA MATEMATICA - 24 luglio 2013 - Corso di Laurea in Matematica

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con cognome e nome e con il numero messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 - Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$:
i. disegnare il ritratto in fase;
ii. scrivere esplicitamente il flusso $\Phi^t_X(x_0, y_0)$ con $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dato iniziale generico.

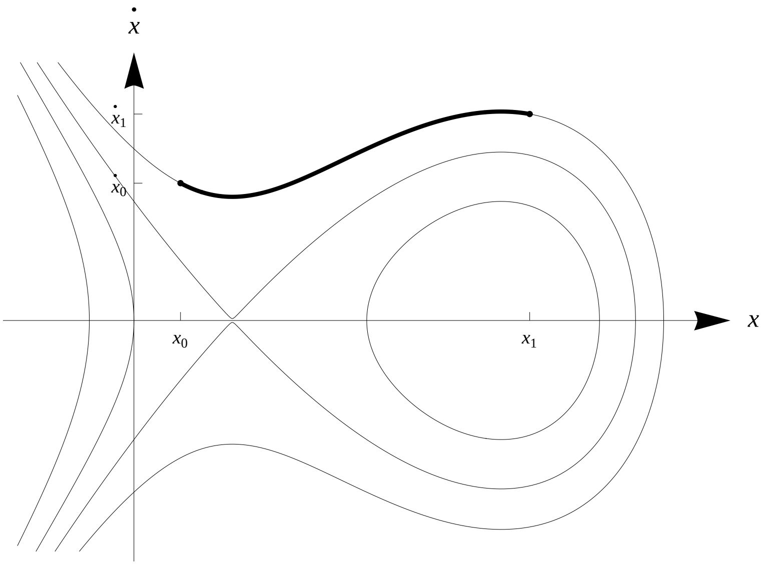
1.2 - Sia dato il sistema di Newton $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
i. Si scriva una funzione $E(x, \dot{x})$ integrale primo del sistema.
ii. Dati due punti in configurazione $x_0 < x_1$ e due velocità $\dot{x}_0, \dot{x}_1$ entrambe maggiori di 0 tali che

$$E(x_0, \dot{x}_0) = E(x_1, \dot{x}_1) = e$$

ed i punti $(x_0, \dot{x}_0), (x_1, \dot{x}_1)$ appartengono alla stessa componente connessa di un livello regolare di E (vedi figura), si usi la relazione

$$\dot{x} = \sqrt{2(e - V(x))}$$

per scrivere in forma integrale il tempo che impiega il flusso ad andare da $(x_0, \dot{x}_0)$ ad $(x_1, \dot{x}_1)$.



2

2.1 - Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente, rotante rispetto ai riferimenti inerziali con velocità angolare costante $\omega = \omega\hat{y}$, giace una guida rettilinea passante per i punti $A = (0, d)$ e $B = (d, 0)$. Un sistema di ascissa s è stabilito sulla guida con origine nel punto A e orientato positivamente nel verso da A a B. Un disco di massa m e raggio R è vincolato con il baricentro G a scorrere senza attrito sulla guida e a rotolare senza strisciare su una guida parallela alla guida passante per A B e posta a distanza R dalla prima. Inoltre, sulla guida per A B scorre in modo liscio un punto materiale P di massa M. Oltre alla gravità, sul sistema agiscono due molle di eguale costante elastica h, una tra il baricentro G del disco e il punto G' di eguale ordinata sull'asse y e una posta tra il baricentro G del disco e il punto P. Si riferisca la posizione del disco alla ascissa $x = x_G$ del suo baricentro e la posizione del punto P alla sua ascissa s sulla guida (per esempio $s_P = 0$ se $P \equiv A$).
i. Mostrare che la forza di Coriolis ha componenti Lagrangiane nulle.
ii. Scrivere l'energia potenziale $\mathcal{U}(x, s)$ delle forze conservative agenti sul sistema e scrivere il sistema di equazioni che determina gli equilibri (x_{eq}, s_{eq}).
iii. Scrivere le condizioni sui parametri per cui esista un solo equilibrio e tale equilibrio sia stabile. *Non occorre determinare esplicitamente tale equilibrio.*
iv. Scrivere l'energia cinetica del sistema.

2.2 - Dimostrare che le rotazioni uniformi di un corpo rigido pesante attorno all'asse di momento d'inerzia mediano sono instabili.

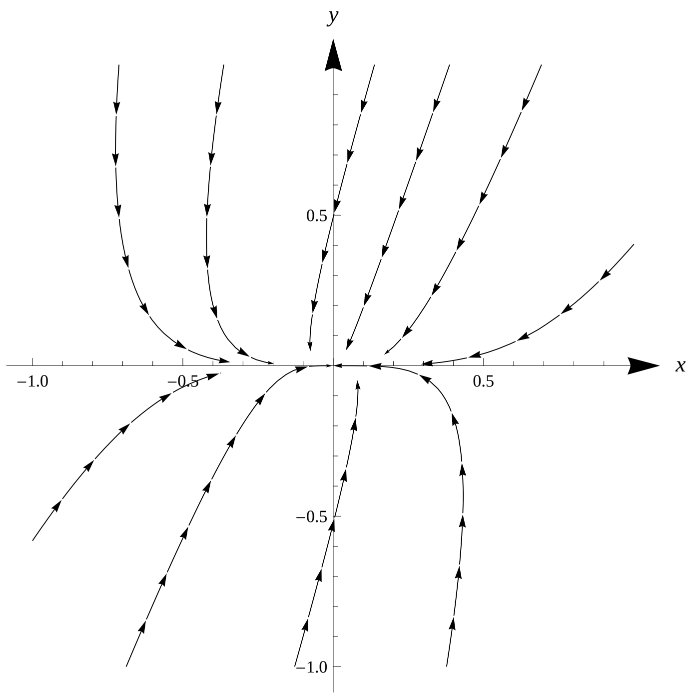
3

3.1 - Dimostrare che il flusso di un sistema Hamiltoniano è una trasformazione canonica 1-valente.

3.2 - Cos'è la trasformata di Legendre? spiegare in dettaglio. Qual è la condizione affinché essa sia un diffeomorfismo locale? e affinché sia un diff. globale? in quest'ultimo caso, che teorema di inversione si usa? spiegare in dettaglio.

Soluzione all'esercizio 1.1

i. Si ha che $\mathrm{tr}A = -5$ e $\det A = 4$. Quindi il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 5\lambda + 4$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -5/2 - 3/3 = -4$ e $\lambda_2 = -5/2 + 3/2 = -1$ mentre i rispettivi autovettori sono $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Segue che il ritratto in fase è



ii. Visto che le matrici di cambiamento di base sono $P = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\3&0\end{smallmatrix}\right)$ e $P^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\3&-1\end{smallmatrix}\right)$ si calcola la mappa esponenziale usando l'identità

$$e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-4t} - e^{t} \\ 0 & 3e^{-4t}\end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi che il flusso è la funzione $\Phi^X : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{x,y}$ data da

$$\Phi^X_t\left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-4t}-e^{-t} \\ 0 & 3e^{-4t}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x_0e^{-t}+(e^{-4t}-e^{-t})y_0 \\ 3y_0e^{-4t}\end{pmatrix}.$$

Soluzione all'esercizio 2.1

i. I vettori v_X e δP_X, rispettivamente velocità del punto materiale X del disco D e generica velocità permessa a X dal vincolo, appartengono al piano del moto assieme a ω. Si ha quindi che la potenza della sollecitazione è

$$\Pi = \int_{X\in D} -2\rho\omega \wedge v_X \cdot \delta P_X \equiv 0$$

Questo è equivalente a dire che la forza di Coriolis è sempre perpendicolare al piano del moto. Analogo per il punto materiale di massa M.

ii. Per il disco (uso il T. di Steiner per il calcolo del momento d'inerzia del disco rispetto all'asse y)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} + \mathcal{U}^{cf} = mg(d-x) + \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}(mx^2 + \frac{mR^2}{4}).$$

per il punto e per l'interazione elastica disco-punto

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} + \mathcal{U}^{cf} = Mg(d - \frac{s}{\sqrt{2}}) + \frac{h}{2}(s - x\sqrt{2})^2 - \frac{\omega^2}{2}M(\frac{s}{\sqrt{2}})^2$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla \mathcal{U} = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} & = & -mg + (h - m\omega^2)x - \sqrt{2}hs + 2hx = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} & = & -\frac{Mg}{\sqrt{2}} - \frac{M\omega^2}{2}s + hs - \sqrt{2}hx = 0 \end{cases}$$

Il sistema è quindi lineare della forma $BX = C$.
iii. La condizione per avere una soluzione unica non nullaè

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3h - m\omega^2 & -\sqrt{2}h \\ -\sqrt{2}h & h - M\frac{\omega^2}{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

e quindi $(3h - m\omega^2)(h - M\frac{\omega^2}{2}) - 2h \neq 0$. La condizione ii) perchè l'equilibrio $X_{eq} = B^{-1}C$ sia stabile è (Teorema THND) che $B = H_U \in Sym^+$ e quindi

$$3h - m\omega^2 > 0, \quad \det B > 0.$$

iv. l'energia cinetica del sistema è (per la condizione di puro rotolamento l'ascissa del punto di contatto del disco con la guida è equivalente –a meno di costante– all'ascissa del baricentro del disco $s_D = x_G\sqrt{2} = R\theta$ dove θ è un angolo tra una direzione invariante rispetto al sistema $Oxyz$ e una direzione invariante, solidale al disco)

$$T = T_D + T_P = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\omega_D I_G \omega_D + \frac{M}{2}v_P^2$$

$$T = \frac{m}{2}2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{2\dot{x}^2}{R^2} + \frac{M}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2}(3m\dot{x}^2 + M\dot{s}^2)$$

La matrice dell'energia cinetica è quindi diagonale $A = Diag[3m, M]$. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \Omega^2 A) = 0.$$